

## บทที่ 3

### ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

---

วัตถุประสงค์ของรายงานวิจัยบทนี้เพื่อแสดงถึงวิธีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาในการให้ได้มาซึ่งคำตอบ เป็นที่ทราบดีว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ของไหลพลศาสตร์ที่สถานะเรย์โนลด์์ที่สูงมีสถานะปั่นป่วนจึงมีการใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยหลายพฤติกรรมรวมเข้าด้วยกันทำให้เกิดสมการอนุพันธ์ในระดับที่สูง อีกทั้งโครงสร้างพื้นที่การคำนวณนั้นมีความซับซ้อนมากเนื่องจากกรุปทรงของทรงกลมที่เป็นวัตถุขวางการไหลผ่านของไหล โดยพื้นที่การคำนวณนี้มีรูปร่างในสามมิติซึ่งทำให้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขอาจไม่ได้รับคำตอบ โดยการประมวลผลอาจมีความคลาดเคลื่อนสูงก่อให้เกิดการลู่ออกของผลเฉลยหากมีการกำหนดวิธีการที่ไม่เหมาะสม โดยเนื้อหาในบทนี้จะแสดงถึงระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง 3 ส่วน คือ พื้นที่ย่อยการคำนวณ (grid generation) การประมาณการอนุพันธ์โดยวิธีผลต่าง (discretization) และการกำหนดเงื่อนไขขอบการคำนวณ (boundary condition)

#### 3.1 โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาของไหลพลศาสตร์ (Computational Fluid Dynamic Program)

ในการศึกษาเชิงคำนวณนี้ได้ใช้โปรแกรมเพื่อการวิเคราะห์ของไหลพลศาสตร์ OpenFOAM version 7 (The OpenFOAM Foundation, 2019) ซึ่งเป็นโปรแกรมที่อยู่ภายใต้เงื่อนไข GNU General Public License สามารถเข้าถึงและใช้งานโดยไม่เสียค่าใช้จ่าย ลักษณะโปรแกรมสามารถดำเนินการใช้โดยติดตั้งบนระบบปฏิบัติการ Linux - Ubuntu Desktop 18.04 โดยการดำเนินการเพื่อป้อนคำสั่งหรือการแก้ไขเงื่อนไขการวิเคราะห์อาศัยภาษาขั้นสูง C++ นอกจากนี้รูปแบบที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบจำลองการไหลพลศาสตร์นี้เป็นแบบการสร้างการประมาณการอนุพันธ์เชิงแบบปริมาตรคำนวณ (finite volume discretization scheme) ซึ่งเหมาะสมกับปัญหาที่การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการไหลเป็นไปแบบทันทีทันใดในระหว่างแต่ละปริมาตรการคำนวณ

### 3.2 พื้นที่และรูปทรงการคำนวณ (Computational Domain and Geometry)

เป็นที่ทราบดีว่าการกำหนดรูปร่างพื้นที่คำนวณของไหลพลศาสตร์หรือขนาดแต่ละปริมาตรการวิเคราะห์ (mesh) ที่เหมาะสมมีส่วนสำคัญในการได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่แม่นยำขึ้นและได้รับการลู่เข้าของผลเฉลยรวดเร็วขึ้น เช่น บริเวณที่พฤติกรรมการไหลเป็นแบบทันทีทันใดระหว่างปริมาตรคำนวณนั้นควรมีการใช้ปริมาตรการคำนวณขนาดเล็กเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการประมาณค่าของสมการอนุพันธ์ อย่างไรก็ตามหากกำหนดหรือสร้างพื้นที่การคำนวณโดยมีขนาดปริมาตรการคำนวณที่มีขนาดเล็กเกินไปจะส่งผลให้สิ้นเปลืองทรัพยากรในการประมวลผลโดยประโยชน์ขึ้นได้

ในการศึกษาเชิงคำนวณนี้ได้ทำการวิเคราะห์รูปทรงคำนวณแบบ O-type mesh ซึ่งมีลักษณะเป็นโครงสร้างที่ชัดเจน (structured grid) เป็นผลมาจากการไหลผ่านภายนอกผิวของวัตถุที่มีผิวโค้ง ซึ่งจะทำให้มีโอกาสได้รับผลการลู่เข้าของคำตอบได้ดีกว่าการใช้แบบ skewed-type mesh หรือ แบบไร้โครงสร้าง (un-structured grid) การสร้าง mesh นี้มีองค์ประกอบใน 3 มิติ ซึ่งมีการขึ้นรูปในระบบพิกัดทรงกลมอันประกอบด้วยในแนวรัศมีจากจุดศูนย์กลางทรงกลม ( $\rho$ ) ในแนวมุมเชิงขั้ว ( $\phi$ ) และในแนวมุมทิศ ( $\theta$ ) ซึ่งการระบุจำนวนของโหนด ( $N$ ) จะนำไปสู่การได้ขอบเขตการวิเคราะห์ของไหลพลศาสตร์ดังสมการ (3.1) ซึ่งปริมาตรการวิเคราะห์มีขนาดคงที่ตลอดขอบเขตการวิเคราะห์

$$a_i = a_0 + (N_i - 1)d \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.1)$$

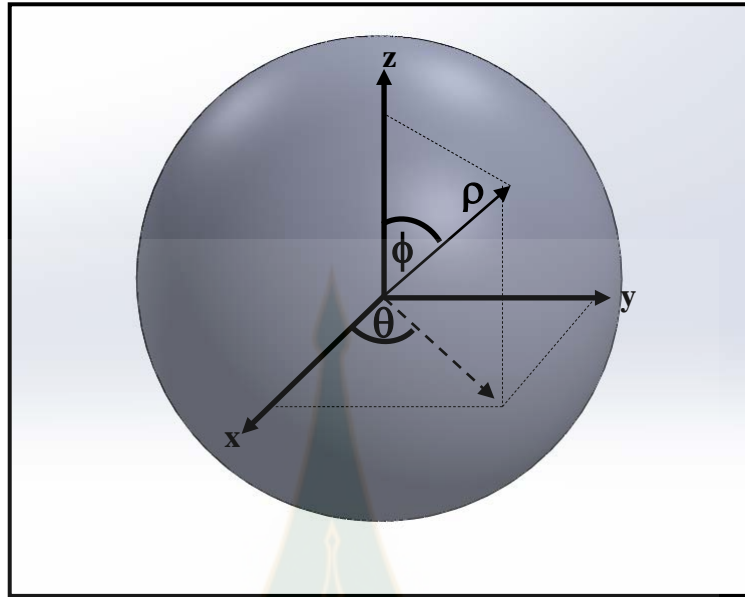
เมื่อ

$a_i$  คือ องค์ประกอบในระบบพิกัดทรงกลม ( $\rho, \phi, \theta$ )

$a_0$  คือ ตำแหน่งเริ่มต้นของแต่ละองค์ประกอบในระบบพิกัดทรงกลม ( $\rho, \phi, \theta$ )

$N_i$  และ  $N$  คือ หมายเลขโหนดและจำนวนของโหนดในแต่ละองค์ประกอบ

$d$  คือ ขนาดการเพิ่มขึ้นระหว่างโหนด เมื่อ  $d = \left[ \frac{a_{\text{finish}} - a_{\text{initial}}}{N - 1} \right]$   
หรือ  $d = a_{i+1} - a_i$



ภาพที่ 3.1 ระบบพิกัดทรงกลมในระบบ 3 มิติ

เพื่อเป็นการลดทรัพยากรในการประมวลผล การลดจำนวนโหนดในการวิเคราะห์โดยให้ปริมาตรคำนวณมีขนาดเล็กเพื่อสามารถวิเคราะห์ผลของอนุภาคการไหลขนาดเล็กได้แม่นยำ จึงควรทำการปรับขนาดปริมาตรคำนวณใกล้ผิวให้มีขนาดเล็กและแผ่ขยายออกกว้างมากขึ้นเรื่อยๆที่บริเวณไกลออกไปจนคงตัวที่ระยะไกลระดับหนึ่ง Kang et al., 2013 ได้กำหนดสมการที่ใช้ในการปรับขนาด mesh ให้ละเอียดหรือหยาบขึ้นโดยความกว้างแต่ละโหนดจะแปรเปลี่ยนไป ดังสมการที่ (3.2)

$$\rho(I) = \rho_i + (\rho_o - \rho_i) \left[ \frac{(1 - \beta^{(I-1)})}{(1 - \beta^{(N_I-2)})} \right] \quad (3.2)$$

เมื่อ

- $I$  คือ ตำแหน่งโหนดตลอดแนวรัศมีจากจุดศูนย์กลาง
- $N_I$  คือ จำนวนโหนดที่กำหนดให้มีมากที่สุดในแนวรัศมีจากจุดศูนย์กลาง
- $\rho_i$  คือ รัศมีภายใน
- $\rho_o$  คือ รัศมีภายนอก
- $\beta$  คือ อัตราส่วนขยาย (expansion ratio)

อย่างไรก็ตามถึงแม้การกำหนด expansion ratio ที่สูงจะยิ่งทำให้ได้ระยะห่างในแนวตั้งฉากกับผิวทรงกลมไปยังโหนดที่หนึ่งจากผิวมีขนาดที่สั้นลง Bakker (2006) ได้แสดงข้อมูลที่สำคัญในการ

กำหนด expansion ratio ควรจะไม่ทำให้อัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของระยะตามแนวตั้งฉากผิวทรงกลมเกินกว่า 20% เพราะจะทำให้ไม่ได้รับการลู่อเข้าของคำตอบได้

ในงานวิจัยนี้มีความเกี่ยวข้องกับสมการการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งมีเงื่อนไขการใช้งานที่เหมาะสมที่ขึ้นอยู่กับระยะห่างไร้นิ้วนในแนวตั้งฉากกับผิวทรงกลม ( $p^+$  แต่ในงานวิจัยนี้ขอระบุเป็น  $y^+$ ) โดย  $y^+$  ที่เหมาะสมจะเป็นตัวกำหนดความหนาแน่นของ mesh หรือการกำหนดขนาด expansion ratio ในบทที่ 4 แบบจำลองการไหลปั่นป่วนจะแสดงถึงช่วงที่เหมาะสมของขนาด  $y^+$  ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้วิเคราะห์ต่อไป

สำหรับการหมุนของทรงกลมจะส่งผลให้อาจต้องมีการเปลี่ยนความหนาแน่นของ mesh หรือ expansion ratio อันเนื่องมาจากการหมุนในด้านที่ยับยั้งการไหลของของไหลจะมีขนาดความเค้นเฉือนที่สูงขึ้นทำให้แนวโน้มของ  $y^+$  จะสูงขึ้นตาม ซึ่งอาจมีผลตรงข้ามกับด้านที่ส่งเสริมความเร็วของการไหล

สำหรับตารางที่ 3.1 ได้แสดงถึงตัวอย่างการการระบุขนาดพื้นที่การคำนวณและปริมาณโหนดที่ใช้วิเคราะห์ในแต่ละทิศทาง ที่สภาวะเรย์โนลด์ ตั้งแต่ 10,000 ถึง 583,000 โดยใช้แบบจำลอง Reynolds Stresses Equation Model ในการพิจารณา โดยจำนวนรวมทั้งหมดของโหนดเป็น 1,000,000 ซึ่งจำนวนรวมจะมีผลต่อการกำหนดระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสม (รายละเอียดในส่วนหลัง) เพื่อให้ได้รับการลู่อเข้าของคำตอบ สำหรับจำนวนโหนดและขนาดในแต่ละองค์ประกอบ ดังนี้

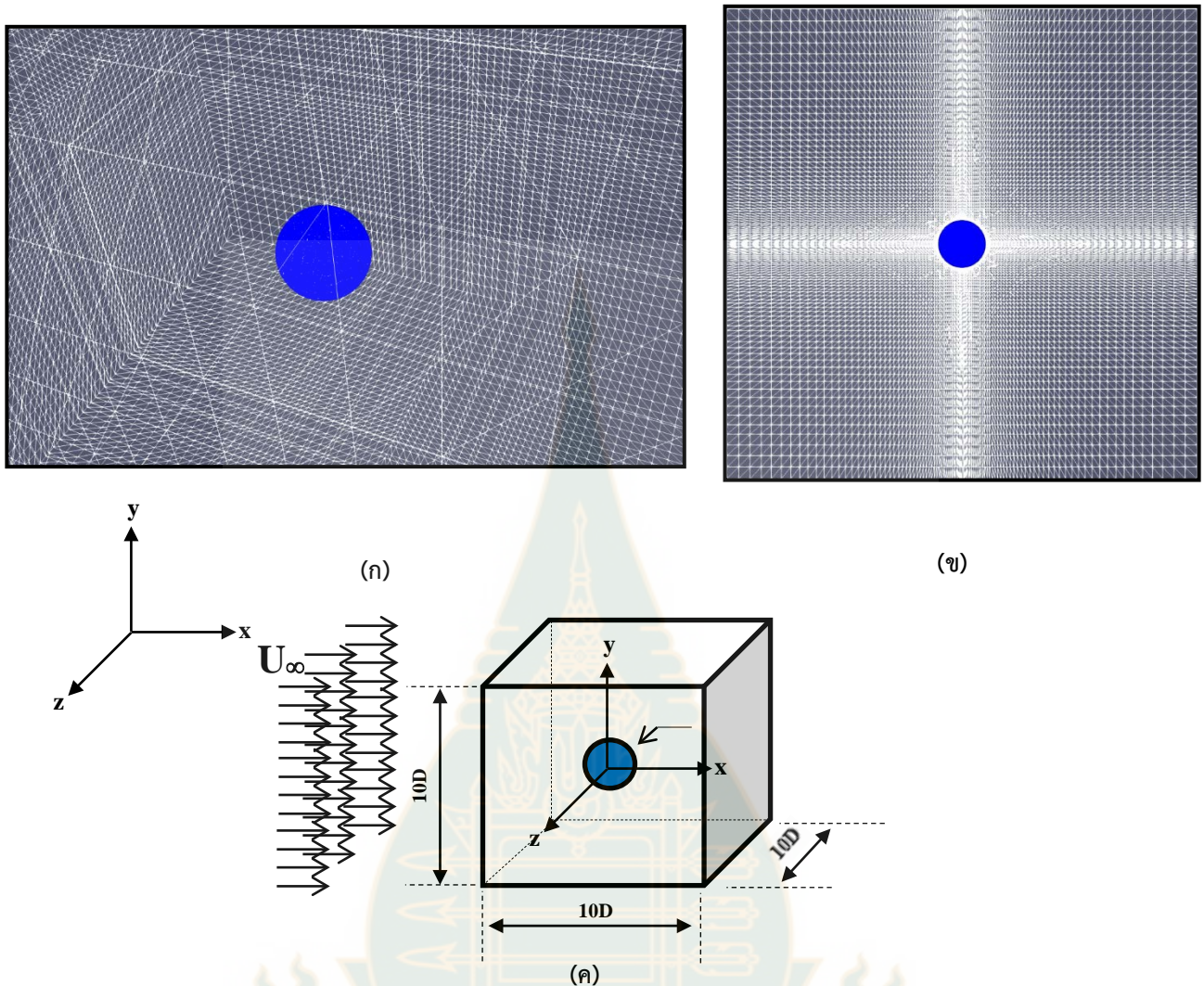


ตารางที่ 3.1 จำนวนโหนดในแต่ละองค์ประกอบตลอดพื้นที่คำนวณ ในการวิเคราะห์ของไหลผ่านทรงกลม โดยแบบจำลอง Reynolds Stress Equation Model

Reynolds number (Re)	Parallel flow direction (x-axis) nodes (I)	Cross flow direction (y-axis) nodes (I)	Span-wise direction (z-axis) (K)	Total Node ( $N_{ijk}$ )	Domain Length		
					Parallel Flow Direction	Cross Flow Direction	Span-wise direction
10,000							
70,026							
96,000	100	100	100	1,000,000	10D	10D	10D
134,000							
583,000							

ทั้งนี้ ภาพที่ 3.2 ได้แสดงพื้นที่การวิเคราะห์ของไหลผ่านทรงกลม โดยภาพที่ 3.2(ก) แสดงถึงโครงสร้าง mesh ซึ่งเป็นแบบโครงสร้างแน่นอนและการแผ่ขยายของ mesh ไปในทิศทางตั้งฉากทำให้มุมระหว่างผิวข้างประกอบปริมาตรตั้งฉากกัน (orthogonal structure) และภาพที่ 3.2(ข) มีการปรับความละเอียดที่บริเวณใกล้ผนังทรงกลมที่อยู่ตรงกลางของขอบเขตการวิเคราะห์ ซึ่งการวิเคราะห์ได้มีการทำการปรับความละเอียดของ mesh ให้มีระยะห่างระหว่างโหนดกับโหนดที่ติดกันบริเวณใกล้ผนังทรงกลมมีขนาดเล็กและบริเวณขอบนอกสุดของพื้นที่การคำนวณให้มีขนาดกว้าง โดยมีการกำหนดขนาดของ expansion ratio ให้มีสัดส่วนของความกว้างโหนดที่บริเวณขอบนอกการคำนวณเป็น 10 เท่าของความกว้างระหว่างโหนดชิดผนัง เพื่อให้พฤติกรรมการไหลเป็นไปตามทฤษฎีที่สอดคล้องกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ ในขณะที่ภาพที่ 3.2(ค) ได้แสดงขอบเขตการวิเคราะห์ทั้งหมดซึ่งมีขนาด 10 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกลม (D) และทิศทางการไหลเข้าขอบเขตการวิเคราะห์อยู่ในแนวแกน x (parallel flow direction) และทิศทางการไหลเข้าขอบเขตการวิเคราะห์อยู่ในแนวแกน y (cross flow direction) และในแนวลึกอยู่ในแกน z (span-wise direction)





ภาพที่ 3.2 พื้นที่ขอบเขตการคำนวณของไหล (ก) โครงสร้างแน่นอนแบบ orthogonal mesh (ข) การปรับความละเอียดโครงสร้างใกล้เคียง และ (ค) ขอบเขตการวิเคราะห์ทั่วทั้งโดเมน

### 3.3 รูปแบบการหาอนุพันธ์โดยผลต่างของปริมาตรคำนวณ (Discretization Scheme)

ในการศึกษาครั้งนี้ได้ใช้รูปแบบการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม (finite volume method) ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับการประมาณค่าปริมาณการไหลตัวแปรต่างๆ หรือฟลักซ์การไหล ( $\phi$ ) ที่กึ่งกลางปริมาตรคำนวณจากปริมาณฟลักซ์ที่ผิวข้างของปริมาตรคำนวณนั้น โดยแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ตัวแปรในอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองซึ่งเป็นเทอมของสมการขนถ่ายพลังงานการไหล (transport equation) สามารถประมาณอนุพันธ์ในรูปผลต่างของตัวแปรต่างๆ โดยทุกตัวแปรทุกตัวที่เป็นปริมาณของไหล (convection terms) ได้แก่ ความเร็ว ( $U_i$ ) และปริมาณการไหลแบบปั่นป่วน

(turbulent terms) ได้แก่ พลังงานจลน์การไหลแบบปั่นป่วน ( $k$ ) อัตราการฟุ้งกระจายของการไหลแบบปั่นป่วน ( $\epsilon$ ) โดยปริมาณต่างๆ ที่กึ่งกลางปริมาตรถูกประมาณด้วยรูปแบบ UPWIND (first order upwind difference scheme) ซึ่งมีระดับเสถียรภาพที่ดีและได้รับการประมาณค่าภายใต้ขอบเขตที่จำกัด (boundedness) ซึ่งมีลักษณะที่ปริมาณที่กึ่งกลางปริมาตรจะมีค่าอยู่ระหว่างค่าที่ผนังทั้งสอง ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะทำการแก้สมการการขนถ่ายพลังงานเข้าไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้รับการลู่อเข้าของคำตอบ สำหรับกระบวนการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธี finite volume method แสดงได้ดังนี้

การไหลใน 1 มิติของ transport equation ดังสมการที่ (3.3)

$$\frac{\partial(\rho U \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_d \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S_{cv} \quad (3.3)$$

เมื่อ

$\phi$  คือ ตัวแปรการไหล เช่น ความเร็ว สารเคมี อุณหภูมิ เป็นต้น

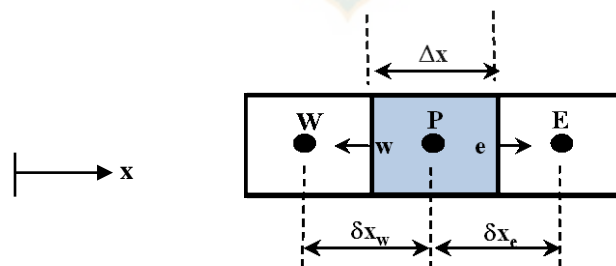
$\kappa_d$  คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายตัวของของไหล (the respective diffusion coefficient)

$S_{cv}$  คือ แหล่งสมสมพลังงานการไหลเพื่อเพิ่มค่าเมื่อสมการไม่สามารถให้ผลได้ไม่เพียงพอ (the collective source terms)

เมื่อทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตรคำนวณ จะได้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho U \phi)}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_d \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} S_{cv} d\Omega \quad (3.4)$$

เมื่อ  $\Omega$  คือ ปริมาตรคำนวณในแต่ละเซลล์การวิเคราะห์



ภาพที่ 3.3 ภาพตัดขวางปริมาตรคำนวณใน 1 มิติ

จากภาพที่ 3.3 ได้แสดงถึงการไหลใน 1 มิติ ผ่านปริมาตรคำนวณ (มุมมองด้านหน้า) โดยมีพื้นที่หน้าตัดที่ผิวข้าง (A) คงที่ เมื่อทำการอินทิเกรตสมการที่ (3.4) จะได้ผลลัพธ์ของการประมาณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ดังสมการที่ (3.5)

$$(\rho UA\phi)_e - (\rho UA\phi)_w = \left( \kappa_d A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \kappa_d A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + S_{CV}^P \Delta \Omega \quad (3.5)$$

เมื่อ  $S_{CV}^P$  คือ the source terms ที่ node P (ศูนย์กลางปริมาตรคำนวณ)

เทอมการวิเคราะห์ที่ 1 และ 2 ของสมการที่ (3.5) คือผลของการฟุ้งกระจายตัวของฟลักซ์การไหล (diffusion fluxes) การคำนวณนี้เกิดขึ้นที่แต่ละผิวข้าง (w : ตะวันตก และ e : ตะวันออก) โดยการเคลื่อนของฟลักซ์การไหลนี้สามารถประมาณได้จากผลต่างค่าระหว่างที่ศูนย์กลางปริมาตรคำนวณที่ต้องการ P และที่ติดต้น ได้แก่ E และ W ซึ่งระยะห่างระหว่างศูนย์กลางปริมาตรคำนวณคือ  $\overline{PE}$  และ  $\overline{WP}$

ดังนั้น การเคลื่อนที่ผนังรอบปริมาตรคำนวณที่ต้องการวิเคราะห์โดยแต่ละด้าน ได้เป็นที่ผนังข้าง e

$$\left( \kappa_d A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \kappa_d A \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{\overline{PE}}} \right) \quad (3.6)$$

ที่ผนังข้าง w

$$\left( \kappa_d A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \kappa_d A \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{\overline{WP}}} \right) \quad (3.7)$$

เมื่อทำการแทนสมการที่ (3.6) และ (3.7) ในสมการที่ (3.5) ได้เป็น

$$(\rho UA\phi)_e - (\rho UA\phi)_w = \kappa_d A \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{\overline{PE}}} \right) - \kappa_d A \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{\overline{WP}}} \right) + S_{CV}^P \Delta \Omega \quad (3.8)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา ได้ทำการรวมตัวแปรหลายตัวแปรเป็นตัวแปรกลุ่มเดียว ทำให้สมการที่ (3.8) ได้เป็น

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + S_{CV}^P \Delta \Omega \quad (3.9)$$



เมื่อ

$F = \rho UA$  คือ สัมประสิทธิ์การขนถ่ายโมเมนต์การไหลระหว่างปริมาตรคำนวณโดยไหลผ่านหน้าตัดผิวข้าง

$D = \frac{\kappa_d A}{\Delta x}$  คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายตัวของของไหล

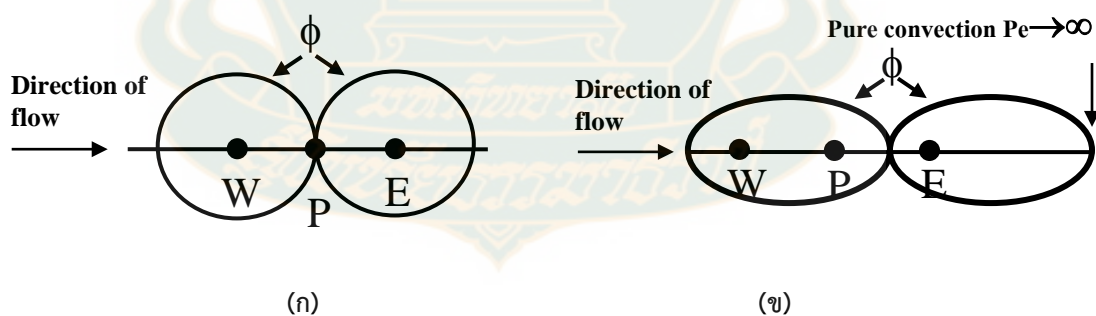
$\Delta x_i$  คือ ระยะระหว่างโหนดในแต่ละแกน

### 3.4 รูปแบบการพาของไหล (Convection Scheme)

#### 3.4.1 การขนถ่ายพลังงานการไหล (Transportiveness)

การวัดสมบัติการขนถ่ายพลังงานการไหล ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับฟลักซ์การไหลต่างๆ ที่จุดศูนย์กลางปริมาตรคำนวณ (P) สามารถพิจารณาได้จากการค่าการไหลไร้หน่วยในเทอมของ Peclet number (Pe) ซึ่งวัดระดับความรุนแรงของอัตราการพา (convection) เทียบกับอัตราการฟุ้งกระจาย (diffusion) โดยมีรูปแบบ ดังสมการที่ (3.10)

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} \quad (3.10)$$



ภาพที่ 3.4 ขนาดของการขนถ่ายพลังงานการไหลระหว่างปริมาตรคำนวณที่ติดกัน (ก) มีเฉพาะการฟุ้งกระจายตัว โดยไร้การพา ( $Pe \rightarrow 0$ ) และ (ข) มีการพาและฟุ้งกระจายตัวเกิดขึ้น

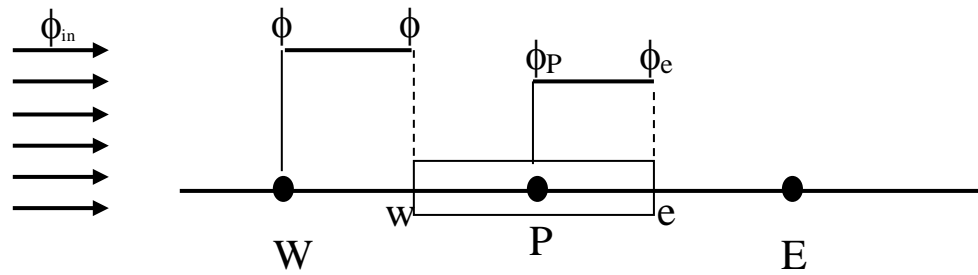
จากภาพที่ 3.4 ได้แสดงถึงสภาพระดับการพาและการฟุ้งกระจายตัวของของไหลที่มีความเกี่ยวข้องกับค่า Peclet Number ในกรณีที่ว่าดังกล่าวเข้าใกล้ศูนย์นั้นหมายถึงเป็นการไหลที่ไร้สภาพการพาโดยมีเฉพาะการฟุ้งกระจายตัว ในทางตรงกันข้ามหากค่า Peclet number มีค่าอนันต์จะเป็น

การไหลที่มีเฉพาะสภาพการพาของไหลเท่านั้น สำหรับภาพที่ 3.4(ก) ได้แสดงถึงผลของปริมาณการไหลที่โหนด P ซึ่งได้รับอิทธิพลจากโหนดรอบตัว คือ โหนด W และ E โดยเป็นกระบวนการฟุ้งกระจายตัวซึ่งโดยปกติแล้วจะมีลักษณะการกระฟุ้งกระจายรอบตัวเท่ากันทุกทิศทางดังนั้นจึงเห็นได้ว่าอิทธิพลของโหนดรอบตัวที่ส่งผลให้ปริมาณฟลักซ์การไหลที่จุด P ได้รับเท่ากัน สำหรับภาพที่ 3.4(ข) ได้แสดงถึงผลของการพาของของไหลซึ่งทิศทางการไหลมาจากโหนด W จะเห็นได้ว่าอิทธิพลการพาจากโหนด W ส่งผลต่อปริมาณฟลักซ์การไหลที่จุด P จะเห็นได้ว่าปริมาณฟลักซ์การไหลเมื่อได้รับอิทธิพลจากการพาจากโหนดต้นทางจะทำให้ปริมาณการขนถ่ายมีลักษณะวงรี ซึ่งเป็นข้อสรุปได้ว่าโหนด P ได้รับอิทธิพลมาจากโหนดต้นทาง

ดังนั้นการ discretization ในแต่ละปริมาตรการคำนวณจึงมีความจำเป็นในการสร้างการถ่วงน้ำหนักที่เกิดจากอิทธิพลของโหนดก่อนหน้า โดยงานวิจัยนี้ได้ใช้รูปแบบ UPWIND discretization scheme เพื่อทำให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่แม่นยำขึ้นต่อไป

### 3.4.2 การดิสครีไทซ์ปริมาตรคำนวณด้วยรูปแบบ UPWIND different scheme (Godunov, 1959)

การหาคำตอบของแต่ละปริมาณฟลักซ์การไหลในแต่ละปริมาตรคำนวณสามารถหาได้จาก การการดิสครีไทซ์ปริมาตรคำนวณทุกปริมาตร ซึ่งรูปแบบการวิเคราะห์นั้นได้แสดงดังภาพที่ 3.5 ซึ่งเป็นการไหลไม่ย้อนกลับ (positive flow direction) โดยปริมาณฟลักซ์การไหลที่พื้นที่หน้าตัดทางเข้าและทางออกสามารถประมาณโดยมีค่าเท่ากับโหนดใกล้เคียงที่อยู่ต้นทางการไหล ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์การไหลที่พื้นที่หน้าตัดไหลเข้าทิศตะวันตก (w) จะได้รับอิทธิพลจากโหนด W มากกว่า โหนด P ดังนั้นจึงกำหนดให้มีค่าเท่ากับปริมาณฟลักซ์การไหลที่โหนด W ในทำนองเดียวกันปริมาณฟลักซ์การไหลออกที่หน้าตัดด้านตะวันออก (e) จะมีปริมาณฟลักซ์การไหลเท่ากับปริมาณฟลักซ์ที่โหนด P ซึ่งรูปแบบการประมาณค่าอนุพันธ์โดยผลต่างนี้อยู่บนพื้นฐาน backward differencing และเป็นการประมาณแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง



ภาพที่ 3.5 ปริมาณฟลักซ์ของพื้นที่หน้าตัดการไหลเข้าและออกของปริมาตรคำนวณโดยรูปแบบ UPWIND difference scheme มีลักษณะ positive flow direction

จากแผนภาพข้างต้นสามารถสร้างความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\phi_w = \phi_w \quad (3.11)$$

และ

$$\phi_e = \phi_p \quad (3.12)$$

แทนค่าสมการที่ (3.11) และ (3.12) ในสมการที่ (3.9) การดิครีไทซ์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.13) ซึ่งสามารถจัดรูปแบบให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลในแต่ละโหนด ดังนี้

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \quad (3.13)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลที่โหนด P สามารถแสดงได้เป็น

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) \quad (3.14)$$

โดยตารางที่ 3.2 แสดงสัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลที่โหนดรอบปริมาตรคำนวณสำหรับสมการที่

3.14

ตารางที่ 3.2 สัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลที่โหนดรอบปริมาตรคำนวณที่พิจารณา

	$a_w$	$a_E$
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	$D_e$
$F_w < 0, F_e < 0$	$D_w$	$D_e - F_e$

และเมื่อพิจารณาทุกรูปแบบการไหล คือ ไม่มีการไหลย้อนกลับ (positive flow direction) และ ไหลย้อนกลับ (negative flow direction) สามารถพิจารณาสัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลของโหนดรอบปริมาตรคำนวณที่วิเคราะห์ ได้ดังตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 สัมประสิทธิ์การขนถ่ายโมเมนตัมและการฟุ้งกระจายตัวทุกทิศทางการไหล

$a_w$	$a_E$
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

### 3.5. วิธีทำซ้ำทางอ้อม (Indirect Iterative Method)

ในการดำเนินการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบของระบบสมการจะมี 2 วิธี คือ วิธีทางตรง และทางอ้อม ซึ่งในวิธีทางตรงนั้นจะมีการใช้ทรัพยากรในการประมวลผลที่สูงมาก เช่น กฎของคาร์เมอร์หากมีจำนวนตัวแปรทั้งสิ้น  $N$  ตัวแปรจำเป็นต้องมีการจดจำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งหมดในพื้นที่ประมวลผลทั้งสิ้น  $N^2$  ค่า และมีการปฏิบัติการเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบทั้งสิ้น  $N^2$  ครั้ง (Versteeg & Malalasekera, 2007) ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบตรงมีความไม่เหมาะสมเพื่อใช้ในการแก้ไขปัญหาที่จำนวนตัวแปรที่มาก จึงเห็นควรดำเนินการด้วยวิธีทางอ้อมจะเหมาะสมมากขึ้น

สำหรับการดำเนินการแก้ปัญหาระบบสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ เช่น ระเบียบทำซ้ำแบบเกาส์ ไฮดอล และ ระเบียบทำซ้ำแบบจาโคบี แต่อย่างไรก็ตามก็ยังมีข้อจำกัดในการ

แก้ปัญหาระบบสมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่ามากกว่า 1,000,000 ตัว เพราะสมรรถนะของระบบประมวลผลอาจไม่เพียงพอ ดังนั้นระเบียบวิธีทำซ้ำแบบ TDMA (the Tri-Diagonal Matrix Algorithm or the Thomas Algorithm) (Thomas, 1949) จะทำให้การประมวลผลหากปัญหาที่มีตัวแปรที่มากจะสามารถดำเนินการได้ เนื่องจากระเบียบวิธีนี้อาศัยเทคนิคการลดการจดจำตัวแปรในแต่ละขั้นตอนการทำซ้ำ โดยมีรูปแบบการวิเคราะห์บนพื้นฐานของ ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ซึ่งเป็นระเบียบวิธีทางตรงและใช้เทคนิคการวิเคราะห์ใน 1 มิติ จนครบ 3 มิติ สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้ระเบียบวิธีนี้ โดยสามารถอธิบายได้ดังนี้

โดยทั่วไปเมื่อทำการแก้ปัญหาของไหลพลศาสตร์จากสมการหลักจะสามารถจัดรูปแบบความสัมพันธ์ในรูปเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์พลาซการไหลกับแหล่งจ่ายปริมาณการไหลในสมการหลักคือ  $[a]_{n \times n} \times [\phi]_{n \times 1} = [S_u]_{n \times 1}$ . ในปัญหา 1 มิติ จะมีความเกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ของพลาซการไหลที่โหนดด้านตะวันตก ที่พิจารณา และด้านตะวันออก ( $a_w$ ,  $a_p$  and  $a_e$ ) ของแต่ละปริมาตรคำนวณคือ  $\beta$   $D$  และ  $\alpha$  และ แหล่งกำเนิดปริมาณการไหล  $S_u$  คือ  $C$  ดังนั้นระบบสมการทั้งหมดแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi_1 &= C_1 & (3.15n) \\ -\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 &= C_2 & (3.15ข) \\ -\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 &= C_3 & (3.15ค) \\ -\beta_4\phi_3 + D_4\phi_4 - \alpha_4\phi_5 &= C_4 & (3.15ง) \\ &\vdots & \\ -\beta_n\phi_{n-1} + D_n\phi_n - \alpha_n\phi_{n+1} &= C_n & (3.15n) \\ &\phi_{n+1} &= C_{n+1} & (3.15n+1) \end{aligned}$$

เพื่อทำการจัดรูปสมการที่ (3.15) ในรูปแบบสามเหลี่ยมตามระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดยมีการคูณค่าคงที่และกระทำระหว่างแถวและยังส่งผลให้เมทริกซ์เติมแต่งที่เกิดขึ้นมีค่าเท่าเดิม จึงเริ่มดำเนินการกำจัดไปข้างหน้าเรื่อยๆ ตั้งแต่สมการที่ (3.15ค) ทำให้ปริมาณพลาซ  $\phi_2$  ได้ถูกกำจัดออกไป  $\frac{D_2}{\beta_3} \times (3.15ค) + (3.15ข)$  แล้วทำให้ได้เมทริกซ์เติมแต่งขึ้นมาใหม่ในสมการที่ (3.15ค')

$$\left[ \frac{D_2 D_3 - \alpha_2 \beta_3}{\beta_3} \right] \phi_3 - \beta_2 \phi_1 - \frac{D_2 \alpha_3}{\beta_3} \phi_4 = \frac{D_2}{\beta_3} C_3 + C_2 \quad (3.15ค')$$



ทำการจัดเรียง  $\phi_3$  ให้อยู่ในแสดงผลแบบซัดแจ็งดังสมการที่

$$\phi_3 = \left[ \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right] \phi_4 + \left[ \frac{\beta_3 \left( \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right] \quad (3.16)$$

ทำการจัดรูปอย่างง่ายสำหรับสมการที่ (3.16) เพื่อระบุเทอมการวิเคราะห์ ดังนี้

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \dots(3.17ก) \quad \text{และ} \quad C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad \dots(3.17ข)$$

ดังนั้นสมการที่ (3.16) เปลี่ยนแปลงไปดังสมการที่ (3.18)

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left( \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (3.18)$$

เมื่อทำการจัดรูปอย่างง่ายสำหรับเทอมในสมการที่ (3.18) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \dots (3.19ก) \quad \text{และ} \quad C'_3 = \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \dots(3.19ข)$$

สุดท้ายสามารถแสดงสมการที่ใช้ในการพิจารณาคำตอบของ  $\phi_3$  ได้ดังนี้

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \quad (3.20)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาการคำนวณตลอดระบบสมการแบบเดียวกับข้างต้น โดยทำกระบวนการจากสมการสุดท้ายย้อนกลับโดยการแทนค่าต่างๆ จากสมการก่อนหน้า สามารถสร้างสมการทั่วไปเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ จากสมการที่ (3.20) อยู่ในรูปสมการที่ (3.21) ดังนี้

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j \quad (3.21)$$

$$\text{เมื่อ } A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \dots(3.22ก) \quad \text{และ} \quad C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \dots(3.22ข)$$

$$A_{j-1} = \frac{\alpha_{j-1}}{D_{j-1}} \dots(3.22ค) \quad \text{และ} \quad C'_{j-1} = \frac{\beta_{j-1} \phi_{j-2} + C_{j-1}}{D_{j-1}} \dots(3.22ง)$$

ในสมการที่ (3.21) สามารถคำนวณโดยการกำหนดเงื่อนไขขอบของค่า A และ C' ที่บริเวณ  $j=1$  และ  $j=n+1$  ดังนี้

$$\text{ที่โหนด 1 :} \quad A_1 = 0 \quad \text{และ} \quad C'_1 = \phi_1$$

$$\text{ที่โหนดสุดท้าย } n+1 : \quad A_{n+1} = 0 \quad \text{และ} \quad C'_{n+1} = \phi_{n+1}$$

สำหรับกระบวนการระเบียบวิธีในการแก้ปัญหาาระบบสมการข้างต้นนั้นเป็นแนวทางการวิเคราะห์สำหรับปัญหาการไหลใน 1 มิติ ในทำนองเดียวกันสามารถนำแนวทางการวิเคราะห์นี้ไปสู่การวิเคราะห์การไหลใน 2 และ 3 มิติได้ โดยใช้แนวทางการวิเคราะห์ที่ละ 1 แนว (1 มิติ) แล้วเปลี่ยนทิศทาง ไปสู่แถวในมิติอื่นๆ ต่อไป

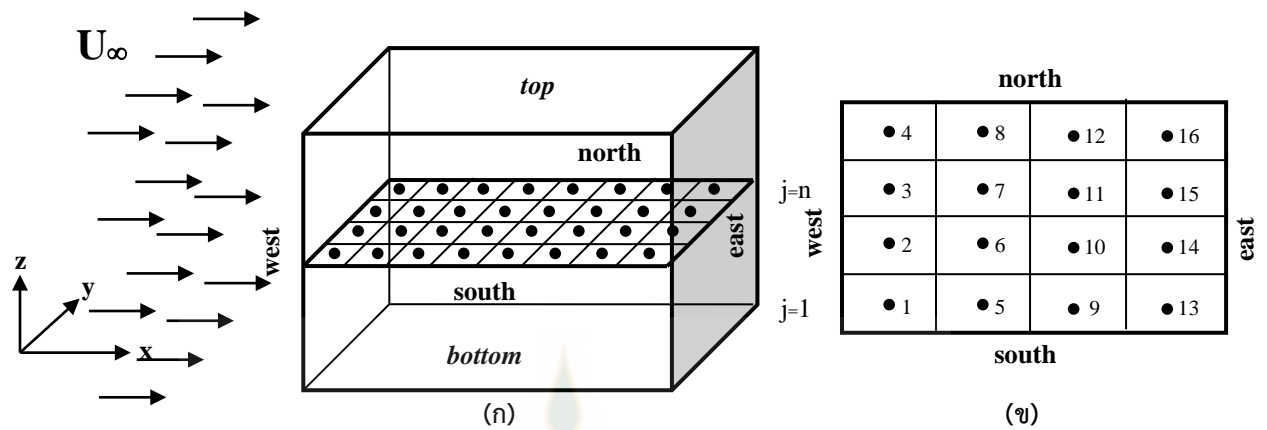
ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลใน 2 มิติ จะทำการวิเคราะห์ในแต่ละแถวจากทิศทางด้านเหนือ (N) สู่มุมด้านใต้ (S) ซึ่งสามารถแสดงสมการการวิเคราะห์ได้คือ

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (3.23)$$

เมื่อ  $\beta_j$ ,  $D_j$  and  $\alpha_j$  คือ สัมประสิทธิ์สำหรับตัวแปรปริมาณฟลักซ์ที่โหนด S N และ P ( $a_S$ ,  $a_P$  และ  $a_N$ ) และเทอมชั่วคราว  $C_j$  มีค่าเท่ากับ  $a_W \phi_W + a_E \phi_E + b$

ในทำนองเดียวกันการวิเคราะห์ปัญหาการไหลใน 3 มิติ สามารถวิเคราะห์ได้เหมือนการไหลใน 2 มิติ โดยมีการเพิ่มเทอมของโหนดรอบตัวในทิศทางด้านบน (T) และ ด้านล่าง (B) ดังนี้

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_B \phi_B + a_T \phi_T + b \quad (3.24)$$



ภาพที่ 3.6 ตำแหน่งของโหนดในการพิจารณาปัญหาการไหล (ก) ปริมาตรคำนวณ และ (ข) ระนาบ x-y

จากภาพที่ 3.6 ได้แสดงถึงการวิเคราะห์ปัญหาใน 3 มิติ แต่การพิจารณาที่เกิดขึ้นจะทำการพิจารณาที่ละระนาบใน 2 มิติ ซึ่งเป็นเหตุผลที่สำคัญที่แสดงให้เห็นว่าหน่วยประมวลผลจะจดจำค่าตัวแปรที่น้อยลงอย่างมาก จากภาพที่ 3.6(ข) การพิจารณาในแต่ละแนวในทิศทาง north - south เป็นการพิจารณาในเชิง 1 มิติ สำหรับการพิจารณาในแถวที่ 1 อาศัยค่าเริ่มต้นซึ่งสมมติเป็นค่า 0 ของด้าน west และ ด้าน east ของแถวสุดท้าย ซึ่งจะทำให้สามารถหาปริมาณฟลักซ์การไหลในโหนดที่ 5 ถึง 8 ต่อไปโดยนำปริมาณฟลักซ์การไหลของโหนดที่ 1 ถึง 4 ซึ่งเป็นขั้นตอนก่อนหน้าได้ โดยการกระทำแบบนี้จะทำที่ละระนาบในระบบ 3 มิติ จนครบแล้วจึงทำซ้ำต่อไปเพื่อให้ได้ค่าการลู่เข้าของคำตอบ

### 3.6 การพิจารณาปริมาณขึ้นอยู่กับเวลา (Time Discretization)

เนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาในการศึกษาครั้งนี้มีความเกี่ยวข้องข้องกับการพิจารณาในสภาวะที่ไม่คงตัว ซึ่งหมายความว่าปริมาณฟลักซ์การไหลจะมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา (สมการหลักที่ใช้ในการพิจารณาครั้งนี้ คือ U-RANS จะกล่าวรายละเอียดในบทที่ 4) ระเบียบวิธีที่ใช้ คือ ระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน (The Crank-Nicolson scheme) ซึ่งการดำเนินการเป็นไปตามระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อประมาณหาค่าปฏิยานุพันธ์ หรือ อินทิเกรต ภายใต้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (the trapezium rule) ผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในระดับความแม่นยำอันดับที่สอง โดยค่าปริมาณฟลักซ์การไหลที่เวลาปัจจุบันจะมีการพิจารณาค่าปริมาณฟลักซ์การไหลที่เวลาก่อนหน้า โดยการพิจารณาฟลักซ์การไหลที่สภาวะเวลาต่างๆ จากพฤติกรรมกรพและการฟุ้งกระจายตัว สามารถแสดงได้

สมการหลักเพื่อพิจารณาฟลักซ์การไหล

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (3.25)$$

พิจารณาปริมาณฟลักซ์การไหลที่เวลาปัจจุบัน (n+1) แสดงได้ คือ

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \int_t^{t+\Delta t} f(t, \phi(t)) dt \quad (3.26)$$

ทำการจัดรูปแบบสมการที่ (3.25) หรือ (3.26) ตามรูปแบบ The Crank-Nicolson scheme สามารถแสดงได้ คือ

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - U \Delta t \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] + \Gamma \Delta t \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad \dots(3.27)$$

หรือ

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{U \Delta t}{2} \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] + \frac{\Gamma \Delta t}{2} \left[ \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad \dots(3.28)$$

ตามที่ The Crank-Nicolson scheme มีการพิจารณาภายใต้รูปแบบการประมาณค่าอันดับที่ 2 ของอนุกรมเทย์เลอร์ทำให้สามารถกำหนดช่วงการเพิ่มขึ้นของเวลา  $\Delta t$  ได้กว้างกว่ารูปแบบการประมาณค่าแบบไม่คงตัวรูปแบบอื่นได้ เช่น รูปแบบชัดเจน (explicit scheme) อย่างไรก็ตาม เพื่อให้การพิจารณาหาค่าปริมาณการไหลสามารถลู่เข้าหาคำตอบ จึงควรกำหนดขนาดของการเพิ่มขึ้นของเวลา  $\Delta t < \frac{\Delta x}{U_\infty D}$  ซึ่งจะทำให้การจัดรูปเมทริกซ์เพื่อแก้ปัญหารูปแบบของสมการที่ (3.27) ให้อยู่ในรูปแบบทั่วๆ ไป คือ 
$$a_P^{t+1} \phi_P^{t+1} = \sum_{nb} a_{nb}^{t+1} \phi_{nb}^{t+1} + a_P^t \phi_P^t + S_U^{t+1} \quad \text{หรือ}$$





และความเร็วแก้ไข (the corrected variable) โดยขั้นตอนการแก้ปัญหาตามลักษณะ the SIMPLE algorithm เป็นดังนี้

การดิสครีไทซ์ความเร็ว  $U$  และ  $V$  ในระบบ 2 มิติ คือ

U-momentum

$$a_p^U U_p = a_e U_e + a_w U_w - \frac{dP}{dx} \delta V \quad (3.29ก)$$

หรือ

$$U_p = \frac{\sum a_i^U U_i}{a_p^U} + D_U (P_w - P_e) \quad (3.29ข)$$

V-momentum

$$a_p^V V_p = a_n V_n + a_s V_s - \frac{dP}{dy} \delta V \quad (3.30ก)$$

หรือ

$$V_p = \frac{\sum a_i^V V_i}{a_p^V} + D_V (P_s - P_n) \quad (3.30ข)$$

เมื่อ  $D_U = \frac{dA_e}{a_p^U}$  และ  $D_V = \frac{dA_n}{a_p^V}$ .

สำหรับการดำเนินการเริ่มจาก ได้ทำการประมาณค่าเริ่มต้น  $U$  และ  $V$  ในสมการที่ (3.29) และ (3.30) ซึ่งการประมาณค่าเริ่มต้นนี้ยังไม่สามารถทำให้เกิดการลู่เข้าของคำตอบในสมการการไหลต่อเนื่อง (continuity equation) ได้ จึงจำเป็นต้องเพิ่มค่าปรับแก้ ( $U'$   $V'$  และ  $P'$ ) ให้กับตัวแปรเริ่มต้น ( $U$  และ  $V$ ) ตามสมการที่ (3.31ก) – (3.31ค) เพื่อให้การดิสครีไทซ์ความเร็วมีความสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่องในทุกปริมาตรการวิเคราะห์ทำให้เกิดการลู่เข้าของปัญหาต่อไป

$$U^* = U + U' \quad (3.31ก)$$

$$V^* = V + V' \quad (3.31ข)$$

และ 
$$P^* = P + P' \quad (3.31ค)$$

เมื่อ  $U^*$ ,  $V^*$  และ  $P^*$  คือ ปริมาณที่ได้รับการปรับค่า (corrected variables)

เมื่อทำการแทนค่าสมการที่ (3.31) ในสมการที่ (3.29) และ (3.30) ทำให้ได้สมการโมเมนต์มที่ที่อยู่ในรูปตัวแปรที่แก้ไขค่าแล้ว ดำเนินการต่อไปโดยการพิจารณาผลต่างระหว่างสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรที่แก้ไขค่าแล้วกับสมการที่ (3.29) และ (3.30) ทำให้ได้สมการใหม่ที่เป็นการระบุค่าตัวแปรแก้ไขเพื่อใช้ในการปรับค่าในรอบของการทำซ้ำต่อไปจนกว่าจะเกิดการลู่เข้าของคำตอบ ดังสมการที่ (3.31) และ (3.32)

$$V'_p = \frac{\sum a_i^v V'_i}{a_p^v} + D_v (P'_s - P'_n) \quad (3.31)$$

และ 
$$U'_p = \frac{\sum a_i^u U'_i}{a_p^u} + D_u (P'_w - P'_e) \quad (3.32)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาในสมการที่ (3.31) และ (3.32) ทำการแยกการพิจารณาในแต่ละสมการเป็น 2 ส่วน ซึ่งเกิดจาก  $U' = U'_1 + U'_2$   $V' = V'_1 + V'_2$  และ  $P' = P'_1 + P'_2$  โดยแสดงดังสมการที่ (3.33) และ (3.34)

$$U'_{p1} + U'_{p2} = \sum \frac{a_i^u U'_i}{a_p^u} + D_u (P'_{w1} - P'_{e1}) + D_u (P'_{w2} - P'_{e2}) \quad (3.33)$$

และ 
$$V'_{p1} + V'_{p2} = \sum \frac{a_i^v V'_i}{a_p^v} + D_v (P'_{s1} - P'_{n1}) + D_v (P'_{s2} - P'_{n2}) \quad (3.34)$$

เมื่อ

$$U'_{p1} = D_u (P'_{w1} - P'_{e1}) \dots (3.33ก) \quad \text{และ} \quad U'_{p2} = \sum \frac{a_i^u U'_i}{a_p^u} + D_u (P'_{w2} - P'_{e2}) \quad \dots (3.33ข)$$

และ

$$V'_{p1} = D_v (P'_{s1} - P'_{n1}) \dots (3.34ก) \quad \text{และ} \quad V'_{p2} = \sum \frac{a_i^v V'_i}{a_p^v} + D_v (P'_{s2} - P'_{n2}) \quad \dots (3.34ข)$$

สมการที่ (3.33) และ (3.34) ได้แสดงถึงตัวแปรที่ใช้แก้ไขค่า โดยสามารถนำไปใช้ในรูปแบบความสัมพันธ์ควบคู่แบบอื่นได้ เช่น the FISO scheme (Pressure Implicit solution by Split Operator methods) ซึ่งจะพิจารณาทั้งสองส่วนของสมการที่ (3.33) และ (3.34) ในขณะที่ the SIMPLE scheme จะพิจารณาเฉพาะส่วนที่หนึ่งตามสมการที่ (3.33ก) และ (3.34ก) เท่านั้น เพื่อให้ง่ายต่อการลู่อู่เข้าของคำตอบ

สำหรับสมการการไหลต่อเนื่องตลอดปริมาตรการวิเคราะห์ที่หน้าตัดไหลเข้าและไหลออกเมื่อพิจารณาจากตัวแปรที่ได้รับการปรับค่าแล้ว สามารถแสดงได้ดังนี้

$$(\rho_e U_e^* - \rho_w U_w^*) \Delta y + (\rho_n V_n^* - \rho_s V_s^*) \Delta x = 0 \quad (3.35ก)$$

หรือ

$$(\rho_e U_e' - \rho_w U_w') \Delta y + (\rho_n V_n' - \rho_s V_s') \Delta x = -S_m \quad (3.35)$$

$$\text{เมื่อ } S_m = -(\rho_e U_e - \rho_w U_w) \Delta y + (\rho_n V_n - \rho_s V_s) \Delta x$$

ในกรณีที่สองที่ 2 ของสมการที่ (3.33) และ (3.34) ไม่นำมาพิจารณา จึงเปลี่ยนความเร็วที่ใช้ปรับค่าให้มีความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.33ก) และ (3.34ก) จึงสามารถแสดงสมการที่ (3.35) อยู่ในรูปสมการที่ (3.36) ได้

$$\rho_e \Delta y D_{U_e} (P'_{P1} - P'_{E1}) - \rho_w \Delta y D_{U_w} (P'_{W1} - P'_{P1}) + \rho_n \Delta x D_{V_n} (P'_{P1} - P'_{N1}) - \rho_s \Delta x D_{V_s} (P'_{S1} - P'_{P1}) = -S_m \quad (3.36)$$

เมื่อทำการจัดรูปสัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลในสมการที่ (3.36) สามารถจัดอยู่ในรูปแบบตามสมการที่ (3.37) คือ

$$a_p P'_{P1} = a_E P'_{E1} + a_W P'_{W1} + a_N P'_{N1} + a_S P'_{S1} + S_u \quad (3.37)$$

เมื่อ

$$a_E = \rho_e \Delta y D_{U_e} \quad a_W = \rho_w \Delta y D_{U_w} \quad a_N = \rho_n \Delta x D_{V_n} \quad a_S = \rho_s \Delta x D_{V_s}$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{และ} \quad S_u = -S_m$$

สมการที่ (3.37) ทำให้ได้คำตอบของตัวแปรไม่ทราบค่า  $P'_i$  ซึ่งเป็นประโยชน์ในการหาคำตอบ  $U'_i$  และ  $V'_i$  ในสมการที่ (3.33ก) และ (3.34ก) ได้

จากที่รูปแบบการวิเคราะห์ความดันตามการจัดเรียงของตัวแปรบน the collocated grid ก่อให้เกิดปัญหาการได้ค่าความดันที่มีความกวัดแกว่งระหว่างโหนดปัจจุบันกับโหนดถัดไปเพราะว่า กระบวนการดิครีทไธซ์ SU ไม่ได้รวมตัวแปรความดันในสมการ  $S_u = S_m = (\rho_e U_e - \rho_w U_w)\Delta y + (\rho_n V_n - \rho_s V_s)\Delta x$  ที่โหนดการวิเคราะห์ปัจจุบัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องสร้างความสัมพันธ์ของความเร็วให้มีความเกี่ยวข้องกับความดัน โดยสามารถสร้างความสัมพันธ์เพิ่มเติม โดยมีการพิจารณาผลของการเปลี่ยนแปลงความดันรอบหน้าตัดด้านข้างของปริมาตรการวิเคราะห์เพื่อส่งผลต่อขนาดความเร็วที่ศูนย์กลางปริมาตรการวิเคราะห์ คือ

$$U_p^0 = U_p + \left( \frac{\delta V}{a_p} \frac{dP}{dx} \right)_p \dots (3.38ก) \quad \text{และ} \quad V_p^0 = V_p + \left( \frac{\delta V}{a_p} \frac{dP}{dy} \right)_p \dots (3.38ข)$$

ดังนั้นความเร็วที่หน้าตัดผิวข้างของปริมาตรการวิเคราะห์สามารถปรับปรุงได้ดังสมการที่ (3.39ก) – (3.39ง)

$$U_e^0 = \frac{1}{2}(U_e^0 + U_p^0) \dots (3.39ก) \quad \text{และ} \quad U_w^0 = \frac{1}{2}(U_p^0 + U_w^0) \dots (3.39ข)$$

$$V_n^0 = \frac{1}{2}(V_n^0 + V_p^0) \dots (3.39ค) \quad \text{และ} \quad V_s^0 = \frac{1}{2}(V_p^0 + V_n^0) \dots (3.39ง)$$

จากสมการที่ (3.38ก) และ (3.38ข) ทำให้ได้รับค่าความเร็วที่กึ่งกลางปริมาตรการวิเคราะห์ ดังสมการที่ (3.40ก) และ (3.40ข) ต่อไป

$$U_p = U_p^0 - \left( \frac{\delta V}{a_p} \frac{dP}{dx} \right)_p \dots (3.40ก) \quad \text{และ} \quad V_p = V_p^0 - \left( \frac{\delta V}{a_p} \frac{dP}{dy} \right)_p \dots (3.40ข)$$

จากกระบวนการข้างต้นเป็นระเบียบวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบ ริห์-โชว์ (the Rhie-Chow interpolation) ซึ่งทำให้เกิดการบั่นทอนค่าความดันและความเร็วที่ศูนย์กลางปริมาตรวิเคราะห์และเป็นวิธีการลดปัญหาการกวัดแกว่งของปริมาณฟลักซ์ที่ได้ (Rhie and Chow (1982) อ้างถึงโดย

(Davidson (2002) เพื่อทำกระบวนการการวิเคราะห์หาความเร็วในองค์ประกอบ U สมบูรณ์ แทนสมการที่ (3.38ก) และ (3.39ก) ในสมการที่ (3.40ก) ทำให้ได้ความเร็ว U ที่พื้นที่ผิวข้าง east (e) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2}(U_E + U_P) + \frac{\delta V}{2a_p} \left[ \left( \frac{dP}{dx} \right)_E + \left( \frac{dP}{dx} \right)_P \right] - \frac{\delta V}{a_p} \frac{P_E - P_P}{\Delta x} \\
 &= \frac{1}{2}(U_E + U_P) + \frac{\delta V}{2a_p} \left[ \left( \frac{P_{EE} - P_P}{2\Delta x} \right)_E + \left( \frac{P_E - P_W}{2\Delta x} \right)_P \right] - \frac{\delta V}{a_p} \frac{P_E - P_P}{\Delta x} \quad (3.41ก) \\
 &= \frac{1}{2}(U_E + U_P) + \frac{\delta V}{4a_p \Delta x} [P_{EE} - 3P_E + 3P_P - P_W]
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันการพิจารณาความเร็วที่ผิวข้างหน้าตัดด้านอื่นแสดงได้เป็น

$$U_w = \frac{1}{2}(U_P + U_W) + \frac{\delta V}{4a_p \Delta x} [P_E - 3P_P + 3P_W - P_{WW}] \quad (3.41ข)$$

$$V_n = \frac{1}{2}(V_N + V_P) + \frac{\delta V}{4a_p \Delta y} [P_{NN} - 3P_N + 3P_P - P_S] \quad (3.41ค)$$

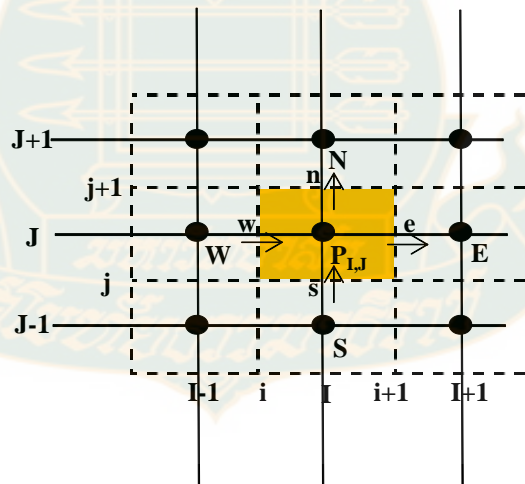
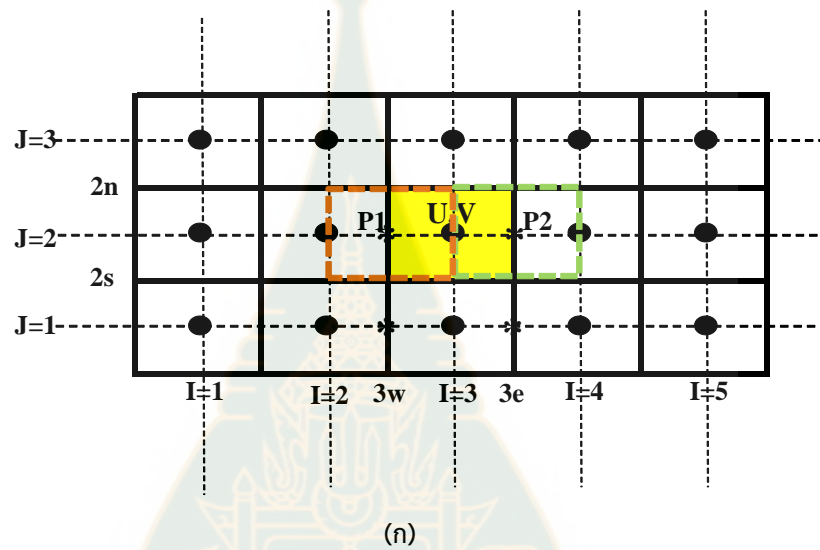
$$V_s = \frac{1}{2}(V_P + V_S) + \frac{\delta V}{4a_p \Delta y} [P_N - 3P_P + 3P_S - P_{SS}] \quad (3.41ง)$$

สมการที่ (3.41ก) – (3.41ง) ส่งผลทำให้ได้ค่าของ  $S_u = (\rho_e U_e - \rho_w U_w) \Delta y + (\rho_n V_n - \rho_s V_s) \Delta x$  จะเห็นได้ว่า the Rhie-Chow interpolation เป็นกระบวนการที่สำคัญที่ทำให้ได้ค่าความดันในปริมาตรการคำนวณและลดการกวัดแกว่งของความดันระหว่างโหนดได้ดี เพื่อให้กระบวนการวิเคราะห์ตามรูปแบบ the SIMPLE algorithm สมบูรณ์ Craft (2015) ได้แสดงถึงขั้นตอนการวิเคราะห์ไว้ดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นในการวิเคราะห์ของปริมาณความเร็ว
2. แก้สมการโมเมนตัมเพื่อหาค่า U และ V
3. ทำการแก้ระบบสมการโดยมีรูปแบบเป็นไปตามกฎสามเหลี่ยมของเมทริกซ์ ตามสมการที่ (3.37)
4. แก้คำตอบเพื่อหาค่า  $P'$
5. คำนวณหาค่าความเร็วปรับแก้  $u'_i$  ในสมการที่ (3.33ก) และ  $v'_i$  ในสมการที่ (3.33ก)
6. ปรับค่าเริ่มต้น P U และ V
7. ทำซ้ำจนกระทั่งได้รับการลู่เข้าของคำตอบ



นอกจากนี้รูปแบบ the SIMPLE scheme ยังสามารถนำไปใช้กับการจัดเรียงข้อมูลของความดันและความเร็วโดยมีการสับหว่างกันระหว่างศูนย์กลางปริมาตรวิเคราะห์กับพื้นที่หน้าตัดผิวข้าง (staggered grid) ดังภาพที่ 3.8 ซึ่งรูปแบบการจัดวางแบบนี้ยังเป็นอีกวิธีที่จะลดการกวัดแกว่งของความดันระหว่างปริมาตรคำนวณได้ดี และการวิเคราะห์เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบจะมีรูปแบบที่คล้ายคลึงกับ the collocated grid ที่ได้กล่าวถึงข้างต้นอีกด้วย



ภาพที่ 3.8 การบันทึกความเร็วบนปริมาตรคำนวณแบบสับหว่างกัน (ก) ตำแหน่งบันทึกค่าความดันและความเร็ว และ (ข) ตำแหน่งบันทึกค่าความดัน

### 3.8 ตัวประกอบค่าผ่อนปรน (Under Relaxation Factor)

ในระเบียบวิธีทำซ้ำแบบ TDMA และ P-V coupling จะมีการหาการลู่เข้าของคำตอบซึ่งสามารถปรับปรุงความสามารถในการลู่เข้าของคำตอบได้จากการใช้ตัวประกอบค่าผ่อนปรน (under relaxation factor :  $\alpha$ ) เพื่อใช้ในการห้วงการประมาณค่าเริ่มต้นในแต่ละรอบการทำซ้ำซึ่งสามารถส่งเสริมการได้รับการลู่เข้าของคำตอบและป้องกันการความผิดพลาดจากการทำซ้ำในรอบถัดไปมีผลทำให้เกิดการลู่ออกของคำตอบ (divergence) โดยทั่วไปการใช้ under relaxation factor จะอยู่ในช่วง  $0 < \alpha < 1$  ขึ้นอยู่กับลักษณะการวิเคราะห์ปัญหา เช่น สถานะคงตัวต้องการค่า  $\alpha$  ที่ต่ำ ในขณะที่สถานะไม่คงตัวควรระบุค่า  $\alpha$  ที่สูงขึ้นมาเพื่อให้เกิดการลู่เข้าของคำตอบเร็วขึ้น

สมการที่ (3.42) ได้แสดงการใช้รูปแบบค่าผ่อนปรนที่ใช้ในการวิเคราะห์หาปริมาณฟลักซ์การไหลในพื้นที่การคำนวณทั้งหมด

$$\phi_P^{\text{new}} = \alpha \phi_P^{\text{calc}} + (1 - \alpha) \phi_P^{\text{old}} \quad (3.42)$$

เมื่อ

$\phi_P^{\text{old}}$  คือ ปริมาณฟลักซ์ในกระบวนการทำซ้ำก่อนหน้า

$\phi_P^{\text{calc}}$  คือ ปริมาณฟลักซ์ในกระบวนการทำซ้ำปัจจุบัน

$\phi_P^{\text{new}}$  คือ ปริมาณฟลักซ์ในกระบวนการทำซ้ำถัดไป

รูปแบบทั่วไปในการวิเคราะห์หาปริมาณฟลักซ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรคำนวณรอบตัว

$$\frac{a_P}{\alpha} \phi_P^{\text{new}} = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S + (1 - \alpha) \frac{a_P}{\alpha} \phi_P^{\text{old}} \quad (3.43)$$

ในเชิงปฏิบัติจะมีการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของโหนดที่สนใจ ( $a_P$ ) และ ปริมาณการเพิ่มค่าฟลักซ์การไหล ( source term : S) ด้วย relaxing factor

$$a_P^{\text{new}} = \frac{a_P}{\alpha} \quad (3.44ก)$$

และ

$$S_{\text{new}} = S + (1 - \alpha) a_P^{\text{new}} \phi_P^{\text{old}} \quad (3.44ข)$$

ซึ่งมีผลทำให้สัมประสิทธิ์ของฟลักซ์การไหลอยู่ในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมที่สามารถเพิ่มความสามารถในการได้รับการลู่เข้าของคำตอบ นอกจากนี้ยังสามารถใช้ตัวประกอบค่าผ่อนปรนในความสัมพันธ์ควบคุมความดันและความเร็วที่อยู่ในรูปแบบ SIMPLE scheme ได้ ซึ่งการประมาณค่าเริ่มต้นของความดัน

( $P_p^{\text{new}}$ ) สามารถใช้ตัวประกอบค่าผ่อนปรนปรับค่าจากความดันที่ใช้ปรับค่าได้ ดังสมการที่ (3.45)

$$P_p^{\text{new}} = P_p^* + \alpha P_p' \quad (3.45)$$

สำหรับตัวประกอบค่าผ่อนปรนที่ใช้ในการวิเคราะห์ของไหลผ่านทรงกลมในสภาวะหยุดนิ่งที่สภาวะเรย์โนลด์ต่างๆ เป็นดังตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4 ตัวประกอบค่าผ่อนปรนที่ใช้ในการศึกษาเชิงคำนวณของไหลผ่านทรงกลมในสภาวะหยุดนิ่ง

Reynolds Number	Under-Relaxing Factor		
	Turbulence quantities ( $k, \epsilon$ )	Mean Velocity ( $U_i$ )	Pressure (P)
	(steady / unsteady)	(steady / unsteady)	(steady / unsteady)
10,000			
70,026			
96,000	0.4/0.2	0.4/0.2	0.3/0.1
134,000			
583,000			

### 3.9 เกณฑ์การลู่เข้าของคำตอบ (Convergence Criteria)

การดิสนอร์ไอซ์สมการการขนถ่ายพลังงานการไหลในฤุกหการลู่เข้าของคำตอบด้วยวิธีการทำซ้ำ ดังนั้นหากการเปลี่ยนแปลงระหว่างผลลัพธ์ระหว่างการทำซ้ำก่อนหน้ากับปัจจุบันเข้าสู่เกณฑ์ที่ยอมรับได้ก็จะถือว่าปริมาณฟลักซ์ที่คำนวณได้คือคำตอบของการทำซ้ำ โดยเฉพาะคงเหลือ (residual :

$R_\phi$ ) จะพิจารณาจากทุกปริมาณพลั๊กซ์การไหลที่เกี่ยวข้องในปริมาตรการวิเคราะห์ใดๆ ดังสมการที่ (3.46)

$$R_\phi = a_p^t \phi_p^t - \sum_{nb} a_{nb}^t \phi_{nb}^t - a_p^{t-1} \phi_p^{t-1} - S_U \quad (3.46)$$

เมื่อ

nb คือ โหนดทั้งหมดรอบโหนดที่สนใจ (E,W,S and N)

สำหรับการพิจารณาการหาเศษคงเหลืออีกรูปแบบหนึ่ง คือ การสร้างความสัมพันธ์เพื่อพิจารณา(normalization) เป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมของเศษคงเหลือทุกปริมาตรการคำนวณเมื่อเทียบกับปริมาตรการไหลที่สนใจ เช่น การเทียบผลรวมของเศษคงเหลือของปริมาณความเร็วในองค์ประกอบหนึ่งกับขนาดโมเมนต์การไหล หรือ ผลรวมของเศษในสมการไหลต่อเนื่องเทียบกับมวล ในทำนองเดียวกันหากผลรวมของการ normalized residual ต่ำกว่าเกณฑ์การลู่เข้าคำตอบที่ต้องการก็จะสามารถยอมรับผลการวิเคราะห์ได้

### 3.10 สมบัติการไหล (Flow Properties)

กฎมาตราส่วน (scaling rule) ได้ถูกพัฒนาจากทฤษฎี Buckingham Pi Theorem) เพื่อวัตถุประสงค์ในการกำหนดสมบัติของไหลที่ไหลผ่านในพื้นที่การวิเคราะห์โดยไม่จำเป็นต้องให้ขนาดของทรงกลมและสมบัติของของไหลเหมือนกับการทดลอง เนื่องจาก scaling rule ได้ถูกพิสูจน์ว่าหากมีการจัดกลุ่มของตัวแปรให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติหน่วยหากมีปริมาณที่เท่ากันแล้วของไหลจะแสดงพฤติกรรมเหมือนกันเสมอ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ใช้ความสัมพันธ์ของค่าเรย์โนลด์ คือ

$$\left( \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \right)_{\text{prototype}} = \left( \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \right)_{\text{model}} \quad \text{เพื่อกำหนดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกลมและสมบัติของของ}$$

ไหลที่ไหลผ่าน อันได้แก่ ความหนาแน่น ( $\rho$ ) และ ความหนืดพลศาสตร์ของของไหล ( $\mu$ )

### 3.11 เงื่อนไขขอบการวิเคราะห์ (Boundary Conditions)

ในการศึกษาเชิงคำนวณของของไหลพลศาสตร์นั้นสิ่งสำคัญที่จำเป็น คือ การระบุเงื่อนไขการวิเคราะห์ (boundary condition) และค่าปริมาณพลั๊กซ์เริ่มต้น (initial value) ต้องมีความสอดคล้องกับพฤติกรรมการไหลจริง โดยทั่วไปจากเงื่อนไขข้างต้นทำให้มีความจำเป็นต้องระบุปริมาณและเงื่อนไขการไหลที่ปริมาตรคำนวณบริเวณที่เกี่ยวข้อง อันได้แก่ เงื่อนไขการไหลเข้าพื้นที่การ

วิเคราะห์ (fluid inlet) เงื่อนไขการไหลออก (fluid outlet) ผลของผนัง (wall) และบริเวณการไหลอิสระที่ขอบนอกซึ่งการศึกษานี้ให้เงื่อนไขแบบคาบระหว่างคู่ขอบนอกที่เหมือนกัน (periodic boundary)

### 3.11.1 ของไหลไหลเข้าพื้นที่การวิเคราะห์ (Fluid inlet)

ในการศึกษาของรูปแบบการไหลไหลผ่านภายนอกนี้ จำเป็นต้องมีการระบุปริมาณพลาซการไหลที่คงที่ทั้งส่วนปริมาตรการพาได้แก่ตัวแปรความเร็ว ซึ่งมีการระบุเงื่อนไขไหลผ่านขนานกับกับแกน x จากซ้ายไปขวา คือ  $U=1$  และ  $V=0$  ดังภาพที่ 3.2(ค) และพลาซการไหลที่เกี่ยวข้องกับการไหลปั่นป่วน คือ ค่าพลังงานการไหลปั่นป่วนและอัตราการฟุ้งกระจายตัว โดยการระบุค่าจำเป็นต้องใช้ความสัมพันธ์แบบการไหลผ่านภายนอก คือ

$$k = (IU_\infty)^2 \quad (3.47)$$

เมื่อ

$U_\infty$  คือ อัตราการไหลเข้าพื้นที่การวิเคราะห์ (m/s)

$I$  คือ ความเข้มของการไหลแบบปั่นป่วน โดย

$I = 0.5\%$  เมื่อ  $Re. = 10,000$  (Dobson et al., 2014)

$I = 1\%$  เมื่อ  $Re. = 70,026$  และ  $134,000$  (Achenbach, 1972) และ  $Re. = 96,000$  (Kray, Franke and Frank, 2014)

$I = 5\%$  เมื่อ  $Re. = 583,000$  (Achenbach, 1972)

สำหรับอัตราการฟุ้งกระจายตัวสำหรับการไหลผ่านภายนอกต้องทำการประมาณค่าอัตราส่วนความหนืดการไหลปั่นป่วน (turbulent viscosity ratio ;  $\beta$ ) ซึ่งเป็นสัดส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์ความหนืดจำเพาะการไหลปั่นป่วนเทียบกับสัมประสิทธิ์ความหนืดจลน์จำเพาะของของไหล ( $\nu_t/\nu$ ) ซึ่งโดยทั่วไปอัตราส่วนที่ใช้สำหรับการไหลผ่านภายนอกแบบอิสระจะประมาณค่าที่  $\beta = 10$  โดยการประมาณค่าอัตราการฟุ้งกระจายตัวของไหลปั่นป่วน คือ

$$\epsilon = \frac{c_\mu k^2}{\beta \nu} \quad (3.48)$$

เมื่อ

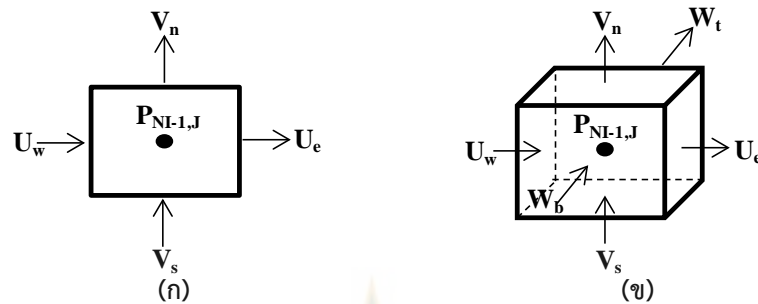
$c_\mu$  คือ ค่าคงตัวสัมประสิทธิ์ความหนืด (viscosity proportional constant : 0.09)

### 3.11.2 ของไหลไหลออกพื้นที่การวิเคราะห์ Fluid outlet

1) ความดันคงที่สำหรับการพา (Fixed Pressure or uniform pressure boundary condition for pressure and convection) ความดันคงที่ที่มีความจำเป็นต้องระบุสำหรับการวิเคราะห์ของไหลไหลผ่านภายนอกวัตถุ โดยเบื้องต้นนั้นความดันสัมบูรณ์ในการวิเคราะห์ (absolute pressure) มีความสัมพันธ์กับความดันปรับแก้ในการประมวลผล (solver pressure) และความดันอ้างอิง (reference pressure)  $P_{abs} = P_{solver} + P_{ref}$ , ดังนั้นที่จุดอ้างอิงการวิเคราะห์จำเป็นต้องกำหนดค่าความดันเพื่อใช้สำหรับปรับแก้ความดันทุกปริมาตรวิเคราะห์ตลอดพื้นที่การคำนวณ ที่จุดอ้างอิงสำหรับการไหลผ่านภายนอกนี้จะถือเป็นสภาวะความดันบรรยากาศ (atmospheric pressure) และมีตัวปรับแก้ความดัน (pressure correction) เป็น 0 จากความสัมพันธ์นี้ทำให้สามารถแปลความหมายจากตัวอย่างเช่น หากที่จุดอ้างอิงต้องการแสดงถึงค่าความดันสัมบูรณ์ที่จุดอ้างอิงเป็น 1 atm หากระบุความดันที่จุดอ้างอิงเป็น 0 atm จะทำให้ตัวประมวลผลเกิดการวิเคราะห์ความดันที่ 1 atm เพื่อให้สอดคล้องกับความดันสัมบูรณ์ที่ต้องการ สำหรับการระบุตำแหน่งจุดอ้างอิงความดันจะระบุที่โหนดการคำนวณก่อนสุดท้ายเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาตามเงื่อนไขการไหลภายนอกหรือไหลอิสระได้

2) ความเร็วบริเวณที่ของไหลไหลออก (Outlet velocity) ที่บริเวณปริมาตรการวิเคราะห์สุดท้ายที่บริเวณออกจากพื้นที่การคำนวณ หากมีการใช้เงื่อนไขขอบการวิเคราะห์เป็นความดันคงที่ที่บริเวณการคำนวณของไหลสู่สภาวะบรรยากาศแล้วจะไม่จำเป็นต้องระบุค่าปริมาณความเร็วหรือเงื่อนไขอื่นได้ เพราะความเร็วที่เกิดขึ้นจะอยู่ในรูปแบบการอนุรักษ์เชิงมวลในปริมาตรการวิเคราะห์นั้น ภาพที่ 3.9 ซึ่งเป็นการแสดงปริมาตรวิเคราะห์ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเป็นความดันคงที่ จากภาพที่ 3.9(ข) พบว่าความเร็วที่หน้าตัดผิวข้างในทิศ east north และ south ( $u_e$ ,  $v_n$  และ  $v_s$ ) ของลูกบาศก์ทรงสี่เหลี่ยมที่ถูกระบุความดันคงที่ หาค่าได้จากการคำนวณจากสมการโมเมนตัมของความเร็ว  $U$  และ  $V$  ซึ่งการวิเคราะห์ค่า  $u_w$  พิจารณาจากสมการอนุรักษ์มวล (mass conservation equation) ดังสมการที่ (3.49ก) และ (3.49ข)





ภาพที่ 3.9 ปริมาตรวิเคราะห์ที่มีการระบุความดันคงที่ในการไหล (ก) 2 มิติ และ (ข) 3 มิติ

สมการอนุรักษ์มวลในการไหล 2 มิติ ที่ปริมาตรการคำนวณความดันคงที่

$$u_w = \frac{(\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho u A)_e}{(\rho A)_w} \quad (3.49ก)$$

สมการอนุรักษ์มวลในการไหล 3 มิติ ที่ปริมาตรการคำนวณความดันคงที่

$$u_w = \frac{(\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho v A)_t - (\rho v A)_b + (\rho u A)_e}{(\rho A)_w} \quad (3.49ข)$$

3) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์การไหลแบบปั่นป่วน (zero gradient for turbulent quantities) สำหรับฟลักซ์ปริมาณการไหลแบบปั่นป่วน  $k$  และ  $\mathcal{E}$  ที่บริเวณปริมาตรวิเคราะห์ทางออกสู่บรรยากาศนั้นสามารถใช้เงื่อนไขขอบของนอยมันน์ (the Neumann boundary condition) ซึ่งมีอนุพันธ์ของฟลักซ์การไหลเมื่อเทียบกับระยะทางในแนวตั้งฉากเป็น 0 ( $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ ) หรือกล่าวได้ว่าปริมาณฟลักซ์การไหลระหว่างคู่ปริมาตรวิเคราะห์ที่ติดกันในแนวตั้งฉากมีปริมาณที่เท่ากันนั่นเอง

### 3.11.3 ผนัง (Wall)

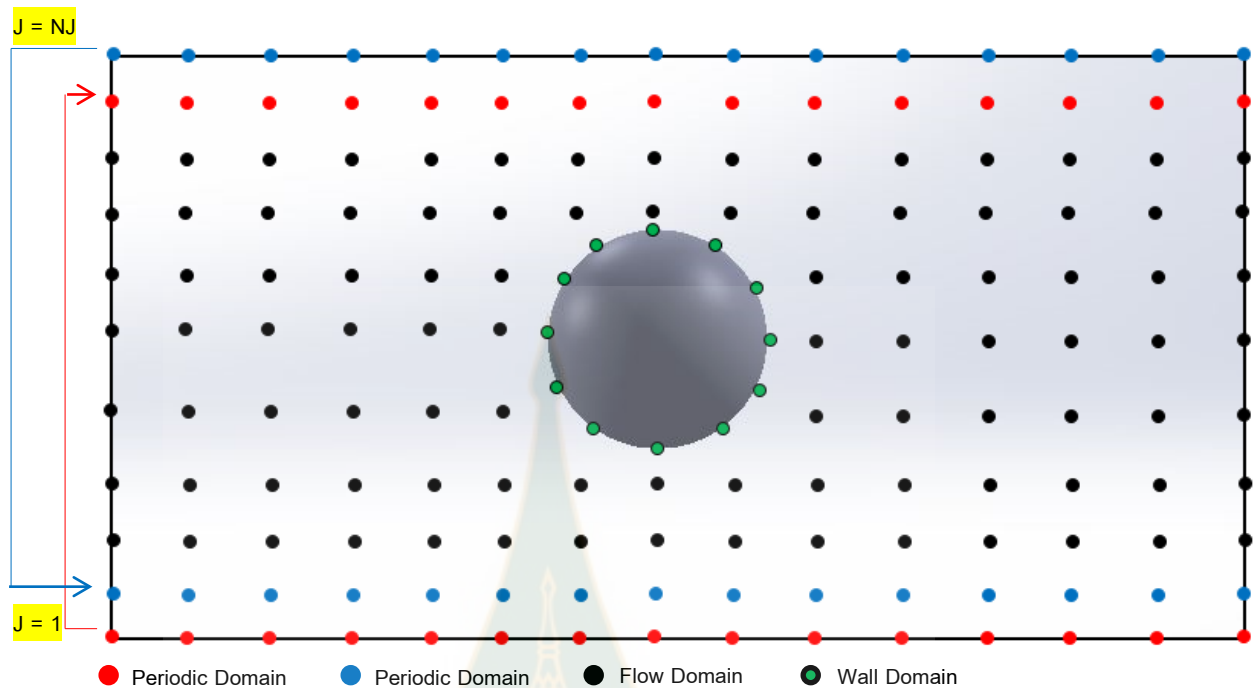
เงื่อนไขแบบผนังในการศึกษาครั้งนี้ถือได้ว่าเป็นสิ่งที่สำคัญมากเพราะจะทำให้เกิดการก่อกวนการไหลอันหมายถึงของไหลที่ไหลผ่านจะเกิดการสัมผัสกับสิ่งกีดขวางทำให้เกิดรูปแบบการไหลที่มีโครงสร้างซับซ้อนกว่าการไหลแบบไม่มีสิ่งก่อกวน ในการวิเคราะห์การไหลที่ผนังจะเกิดเงื่อนไขที่สำคัญ คือ จะไม่มีความเร็วทุกองค์ประกอบที่ผนังและจะเกิดอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วที่สูง (steep gradient velocity) ในทิศทางตั้งฉากกับผนังโดยปริมาณความเร็วที่โหนดนั้นจะถูกดิสครีไทซ์ตามสมการโมเมนตัม

กรณีที่ผนังมีการเคลื่อนที่หรือมีความเร็วที่ผนังนั้นสามารถทำการวิเคราะห์ได้โดยเทคนิคการพิจารณาจากอัตราสัมพัทธ์ระหว่างความเร็วที่ผนังกับความเร็วที่โหนดใดๆ ( $U_p - U_{wall}$ ) ซึ่งเป็นผลทำให้การวิเคราะห์ปริมาณความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นจะพิจารณาจากความเร็วสัมพัทธ์เช่นกัน

สำหรับพลศาสตร์ปริมาณการไหลปั่นป่วนจะมีขนาดที่ผนังตามปรากฏการณ์จริงตามกฎที่ระบุและในทำนองเดียวกันจะเกิดอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณพลศาสตร์การไหลปั่นป่วนในทิศทางตั้งฉากกับผนังที่สูง ซึ่งการเปลี่ยนแปลงเปลี่ยนแปลงพลศาสตร์การพาและการไหลปั่นป่วนจะเกิดขึ้นเป็นแบบเส้นตรงอาจส่งผลให้ได้รับผลการวิเคราะห์ที่คลาดเคลื่อนจากปรากฏการณ์จริง ดังนั้นหากมีการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองอื่นเข้ามาเพื่อให้ปริมาณพลศาสตร์การไหลที่โหนดถัดจากผนังในแนวตั้งฉากมีการเปลี่ยนแปลงไม่เป็นเส้นตรงหรือเป็นไปตามพฤติกรรมจริงของเลย์เออร์การไหลที่ผิวจะทำให้ได้ความแม่นยำของการศึกษาสูงกว่า ซึ่งการศึกษาครั้งนี้มีการกำหนดแบบจำลองชนิด high-Reynolds number อันหมายถึงโหนดแรกถัดจากผนังในแนวตั้งฉากอยู่ในบริเวณการไหลปั่นป่วนเต็มรูปแบบซึ่งความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงในแบบฟังก์ชันลอการิทึมและมีการปรับปรุงอัตราการสร้างการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent production rate;  $P_k$ ) ที่โหนดในบริเวณเลย์เออร์การไหลปั่นป่วนเต็มรูปแบบทั้งปริมาณพลศาสตร์การไหลปั่นป่วน  $k$  และ  $\epsilon$  จะมีการปรับแก้ให้เป็นไปตามแบบจำลองดังกล่าว (รายละเอียดจะกล่าวในบทต่อไป) นอกจากนี้การศึกษานี้ถือว่าผนังทรงกลมมีความเป็นฉนวนหรือมีคุณสมบัติไปตามกระบวนการอะเดียแบติก (adiabatic process) คือ ไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างโหนดเกิดขึ้น

#### 3.11.4 คาบคู่เสมือน (Periodic / cyclic boundary conditions)

การใช้เงื่อนไขขอบเขตคาบคู่เสมือน (periodic boundary condition) ได้ถูกนำมาใช้ในการให้เงื่อนไขที่บริเวณการไหลอิสระซึ่งอยู่ห่างจากทรงกลม ภาพที่ 3.10 ได้แสดงพื้นที่การคำนวณในลักษณะ 2 มิติ โดยมีการกำหนดปริมาณพลศาสตร์การไหลทั้งปริมาณการพาและการไหลปั่นป่วนให้มีความสัมพันธ์ตามเงื่อนไข คือ เมื่อพลศาสตร์ไหลเข้าที่ระนาบ  $J=1$  จะไหลออกที่  $J = NJ-1$  (สัญลักษณ์ “สีแดง”) ซึ่งสามารถสร้างความสัมพันธ์ได้ คือ  $\phi_{J=1} = \phi_{J=NJ-1}$  และในขณะเดียวกันมีพลศาสตร์ไหลเข้าที่ระนาบ  $J=NJ$  จะไหลออกที่  $J = 2$  (สัญลักษณ์ “สีน้ำเงิน”) ซึ่งสามารถสร้างความสัมพันธ์ได้ คือ  $\phi_{J=NJ} = \phi_{J=2}$  เช่นกัน



ภาพที่ 3.10 การกำหนดเงื่อนไข periodic boundary condition ที่บริเวณการไหลแบบอิสระห่างจากทรงกลม

### 3.12 บทสรุป (Concluding Remarks)

การศึกษาครั้งนี้ได้มีการใช้โปรแกรม “OpenFOAM version 7.0” ซึ่งอยู่ภายใต้เงื่อนไข GNU General Public License สามารถเข้าถึงและใช้งานโดยไม่เสียค่าใช้จ่าย โดยมีการสั่งการและปรับแก้โปรแกรมด้วยภาษาคอมพิวเตอร์ C++ โดยพื้นที่การวิเคราะห์ของการไหลผ่านทรงกลมเป็นการไหลภายนอก ซึ่งมีขนาดความกว้างของโดเมนการวิเคราะห์เป็นสี่เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางและโครงสร้าง mesh เป็นแบบ มีโครงสร้างแน่นอน และมีรูปแบบชนิด O-type grid รอบพื้นที่ทรงกลมซึ่งเป็นวัตถุวางเส้นทางการไหลแบบผิวโค้ง ดังนั้นพื้นที่การวิเคราะห์ถูกขึ้นรูปจากระบบพิกัดทรงกลม และปริมาณพลักซ์การไหลในพื้นที่การวิเคราะห์ทุกปริมาตรคำนวณถูกดิสครีไทซ์แบบ finite volume discretization scheme ซึ่งทำให้สามารถพิจารณาผลการเปลี่ยนแปลงปริมาณพลักซ์ระหว่างปริมาตรการวิเคราะห์ได้ดี

นอกจากนี้ในการวิเคราะห์ปริมาณพลักซ์การไหลนี้ ได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ เข้ามาเพื่อแก้ปัญหาจากสมการหลัก คือ การจัดรูปความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ปริมาณพลักซ์การไหลที่ตำแหน่งต่างๆ กับ แหล่งแจกจ่ายปริมาณการไหลแบบปั่นป่วน การพิจารณาพลักซ์การไหล

แบบไม่คงตัวโดยระเบียบวิธี the Crank-Nicolson scheme และมีการแก้ระบบสมการโดยวิธี the TDMA scheme เพื่อสามารถรองรับการจดจำตัวแปรได้มาและได้รับการลู่เข้าของคำตอบได้ดี โดยมีการใช้ตัวประกอบค่าผ่อนปรนเพื่อส่งเสริมการลู่เข้าหาคำตอบได้ ในขณะที่เดียวกันมีการให้ความสัมพันธ์ควบคู่ระหว่างความดันและความเร็วในรูปแบบ the SIMPLE algorithm เพื่อใช้วิเคราะห์หาความดันจากการดิสครีไทซ์ความเร็วอันเนื่องมาจากสมการหลักไม่ได้ให้ความสัมพันธ์แบบชัดแจ้งของปริมาณความดันที่เกิดขึ้น

สำหรับเงื่อนไขขอบเป็นสิ่งสำคัญที่จำเป็นต้องระบุเพื่อให้ได้คำตอบที่มีความสอดคล้องกับสภาพการไหลจริง และเงื่อนไขเริ่มต้นให้มีความสอดคล้องกันสมบัติของไหลและการไหลแบบปั่นป่วน โดยการระบุเงื่อนไขหรือสมบัติการไหลได้อาศัย the scaling rule เพื่อลดขนาดพื้นที่การวิเคราะห์และส่งผลกระทบต่อสมบัติของไหลที่เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นได้

อย่างไรก็ตามในการได้มาซึ่งการทำนายพฤติกรรมกรรมการไหลที่แม่นยำ ตัวแบบจำลองที่เลือกใช้ต้องมีความเหมาะสมและสอดคล้องกับสภาวะความปั่นป่วนการไหล ซึ่งตัวแบบจำลองที่ใช้เป็นสมการหลัก ได้พัฒนาขึ้นมาโดยมีความเกี่ยวข้องกับพฤติกรรมจริงที่เกิดขึ้นซึ่งจะกล่าวถึงในบทวิจยต่อไป

